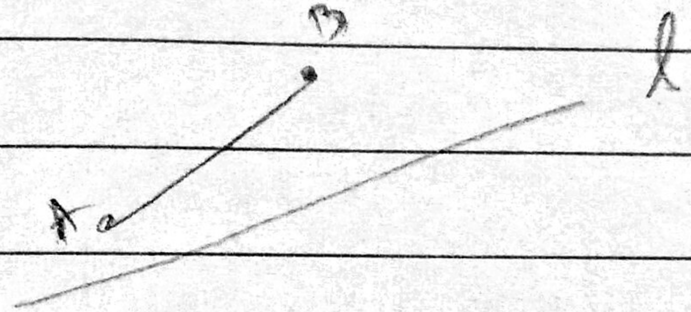
19/10/2016

- Συνέχεια απόδειξης

Επίπεδο : ΕΠ

$\underline{\Omega} = \text{Επ} : l$




Ορίζουμε σχ ~ στο $\underline{\Omega}$ για $A, B \notin l$

$A \sim B \iff A = B$ ή $\overline{AB} \cap l = \emptyset$

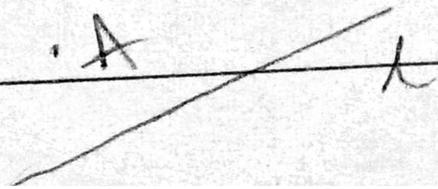
Θεωρούμε τις κλάσεις ισοδυναμίας του ~ (Θέλουμε ν.δ.ο οι υπάρχουν ακριβώς 2 κλάσεις που ικανοποιούν τα ζητούμενα της πρότασης)

1°

Θδο ∃ τουλάχιστον 1 κλάση ισοδυναμίας

Αν δείξουμε ότι το $\underline{\Omega}$ είναι $\neq \emptyset$, τότε $\exists A \in \Omega$. $A \in \kappa\lambda_{\sim}(A) \neq \emptyset$ $(A \sim A)$

Από Θ3 ⇒ αξίωμα ότι $\exists A \notin l$ ⇒ ολοκληρώθηκε!



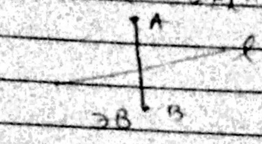
2ο

ΘΔΟ ∃ τουλάχιστον άλλη 1 διαφορετική κλάση

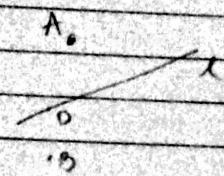
Αρκεί να βρω ένα $B \in \Omega$ ($B \notin \ell$) ώστε $B \notin κλ_\sim(A)$ (A από το 1ο)

δηλαδή τέτοιο $B \not\sim A$

$\iff B \not\sim_\ell A$ (Δηλαδή να βρω ένα B ώστε το AB να τέμνει την $\ell$. Πρέπει να προσδιορ. τα σημεία τομής στην $\ell$ και μετά να βρω το B)



$\exists B$



∃ ένα σημείο $D \in \ell$ (από Θ2) (1)

Άρα (από το Δ2) ∃ σημείο $B$: $A * D * B$

$B \neq A, B \neq D$

ΘΔΟ $B \notin \ell$

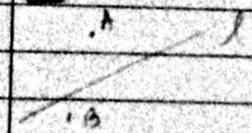
Αν $B \in \ell$, ορίζεται ($A \neq B$) AB: ευθεία

$AB \neq \ell$ ($A \in AB$, $A \notin \ell$)

$\Rightarrow AB \cap \ell = \{D\} \Rightarrow$ Αν $B \in \ell \Rightarrow B = D$, άτοπο αφού $B \neq D$

(1) $\Rightarrow D \in \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} \cap \ell \neq \emptyset \Rightarrow A \not\sim_\ell B$

3ο

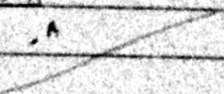


$κλ_\sim(A)$

$κλ_\sim(B)$

ΘΔΟ ∄ άλλη κλάση

Για το A



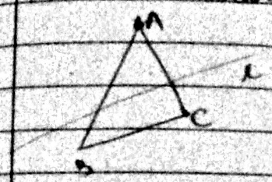
Αν δείξω ότι ισχύει για 2 σημεία B, C

$\left.\begin{matrix} B \not\sim A \\ C \not\sim A \end{matrix}\right\} \Rightarrow B \sim C$

Απόδειξη: A, B, C (A, B, C $\notin \ell$)

$\left.\begin{matrix} B \not\sim A \\ C \not\sim A \end{matrix}\right\}$ δείξω $B \sim C$

i) A, B, C όχι συνευθειακά



εφόσον δεν είναι συνευθειακά
νδο σχηματίζουν το τρίγωνο

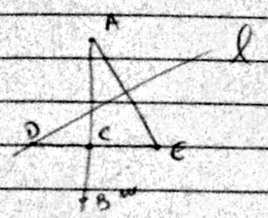
εφόσον $A, B, C \notin \ell$

$B \not\sim A \Rightarrow \ell \cap \overline{AB} \neq \emptyset$

$C \not\sim A \Rightarrow \ell \cap \overline{AC} \neq \emptyset$

Από την ιδιότητα του Δ4 : $\ell \cap \overline{BC} = \emptyset \Rightarrow B \sim C$

ii)



$B \not\sim A$

$C \not\sim A$

B, A, C συνευθειακά

νδο $B \sim C$

BA ευθεία : $BA \nparallel \ell$

Συνέχεια η απόδειξη στο πίσω φύλλο!

$D \in \ell$, $D \notin m$ / $D \neq C \neq E$

$E \notin \ell$

$E \notin m$

Λύση

Αν $E \in m$ $(E \in EC)$ τότε $C \in m$ $(C \in EC)$

$EC = m$, $D \in EC$, $D \notin m$

$C \sim E$

Ισχύει $\overline{CE} \cap \ell = \emptyset$, διότι αν $\overline{CE} \cap \ell \neq \emptyset$, εφόσον η CE τέμνει την $\ell$ στο D $\Rightarrow D \in \overline{CE}$

$C \sim E$ (1)

$E \notin \ell$, $E \notin m$

$D \notin m$ $(D \in \ell)$ Θέλουμε να καταλήξουμε $B \sim C$

Άρα και $\underline{C \not\sim A}$ (2)

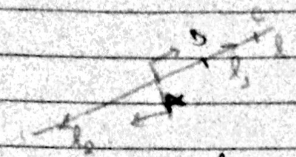
Από (1),(2) $\Rightarrow E \not\sim A \Rightarrow E \sim B$ ? $\Rightarrow \underline{B \sim C}$

$B \not\sim A$ (1) $C \sim E$

Υπάρχει [illegible]
[illegible]
[illegible] Θέλει λύση!

• **Πρόταση 2** Έστω ευθεία $l$, και $A \in l$. Τότε το σύνολο $\Omega_1 = l \setminus \{A\}$ χωρίζεται σε 2 ξένα σύνολα $l_1, l_2$. Δηλαδή: $l_1 \cup l_2 = l \setminus \{A\}$

$l_1 \cap l_2 = \emptyset$

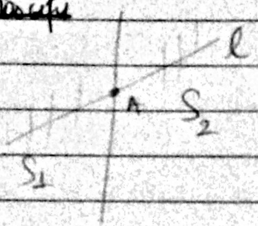


με τις ιδιότητες: $(l_1 \neq \emptyset,\ l_2 \neq \emptyset)$

a) Τα σημεία $B, C \in l \setminus \{A\}$ ανήκουν σε ένα από τα 2 σύνολα (στο ίδιο) αν-ν $\overline{BC} \not\ni A$

b) Τα $B, C \in l \setminus \{A\}$ ανήκουν σε διαφορετικά αν $A \in \overline{BC} \Leftrightarrow B * A * C$ (όπου και $B \neq A$, $C \neq A$ $(B \neq C)$)

**Απόδειξη**



κατασκευάζουμε κάποια ευθεία $m$: $\{m \neq l$, $A \in m\}$

$m \cap l = \{A\}$

Θεωρούμε τα 2 ημιεπίπεδα με σύνορο $m$, έστω $S_1, S_2$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε τις $l_1, l_2$

$S_1 \cup S_2 \supset l \setminus \{A\}$ (ξένα)

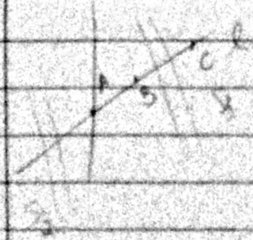
Άρα, φυσιολογικά ορίζουμε:

$l_1 = S_1 \cap (l \setminus \{A\})$

$l_2 = S_2 \cap (l \setminus \{A\})$

Θα αποδείξουμε τις ιδιότητες

a) Έστω $B, C \in l_1$ (στο ίδιο $l_1$) θέλουμε νδο: $A \notin \overline{BC}$



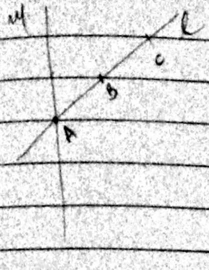
Αν όμως $A \in \overline{BC}$ (1)

Επειδή $B, C \in l_1 \Rightarrow B, C \in S_1$

$\Rightarrow$ Από (1) $\overline{BC} \cap m = \emptyset$ (2)

Αν όμως πως ισχύει η (1) $\Rightarrow A \in \overline{BC} \cap m \overset{(2)}{=} \emptyset$. Άτοπο

Αντίστροφα, Αν $B, C$: $A \notin \overline{BC} \Rightarrow B, C$ ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο




Άρα και τα (όλα τα σημεία της l) τα B, C ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο (ω), στο ίδιο $S_1$

Άρα ισχύει $B \sim_{\omega} C$

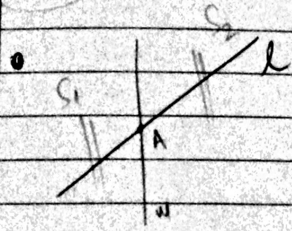
Άρα $\overline{BC} \cap \omega = \emptyset$

Μα αν $\overline{BC} \cap \omega \neq \emptyset$, θα $\exists\, D \in \overline{BC} \cap \omega$

Άρα, $D \in \overline{BC} \cap \omega = \{A\} \to D = A$

$\Rightarrow A \in \overline{BC} \xrightarrow[A \neq C]{A \neq B}$ Άτοπο

b) H/ω




Θδο $l_1 \neq \emptyset$ (1)

και $l_2 \neq \emptyset$ (2)

ξένα $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ (3)

$l_1 \cup l_2 = l \setminus \{A\}$ (4)

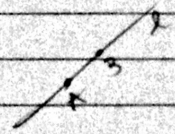
Απόδειξη

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = S_1 \cap l \\ l_2 = S_2 \cap l \end{array}\right\} \; l_1 \cup l_2 = (S_1 \cup S_2) \cap l = (E\pi - (\omega)) \cap l = l - \{A\}$$

(3) άμεσα

$[E\pi - (\omega)] \cap l = E\pi \cap (\omega^c \cap l) = E\pi \cap (l - \omega) = E\pi \cap (l - \{A\}) = l - \{A\}$ ✓

από το (4)




$\exists\, B \in l,\ B \neq A$ (Θ2)

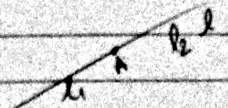
Επομένως, $l_1 \cup l_2 = l \setminus \{A\} \ni B$

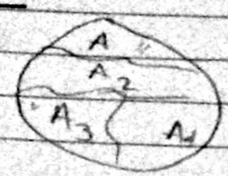
Δx Έστω $B \in l_1$

Άρα να βρω ένα $\underset{\in l - \{A\}}{C}$: $A \in \overline{BC}$ ή $B * A * C$ (Δ3)

Άρα, $C \in l_2$, διότι $\overline{BC} \ni A$, $B \in l_1$ (από το (b) της πρότασης (2))

• $\sim_l \Rightarrow \underset{(\alpha)(b)}{\text{ημιεπίπεδα}} \Rightarrow \underset{(\alpha),(b)}{\text{ημιευθείες}} \Rightarrow \sim_A$






$(\Omega, \sim)$ $\sim \Rightarrow$ διαμέριση

$x, y \in \Omega$ διαμέριση $\Rightarrow \sim$

$x \sim y \Leftrightarrow \exists i = \{(x,y)\} : x, y \in A_i$

Η διαμέριση και [illegible] [illegible] σε [illegible]

$B, C \in \ell \setminus \{A\}$

$B \sim_A C \Leftrightarrow B, C$ ανήκουν στο ίδιο $\ell_i \Leftrightarrow A \notin \overline{BC}$

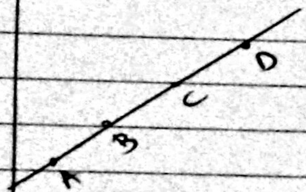
► **Άσκηση:** Δίνονται τα σημεία $A, B, C, D$ ώστε

$A * B * C$ (1)

$B * C * D$ (2)

ΝΔΟ $A * B * C$ κ' $A * C * D$ ← Η/ω

**Λύση**




θδο $A * B * D$

Πρέπει πρώτα να εξασφαλίσουμε ότι $A, B, D$ διακεκριμένα & συνευθειακά

από (1) $\Rightarrow A \in$ ευθεία $BC$

$D \in$ — " — $BC$

$\Rightarrow A, D, B, C$ συνευθειακά

Επίσης $A * B * C \Rightarrow A, B, C$ διακεκριμένα

θδο $D \neq A$, $D \neq B$, $D \neq C$ $\Rightarrow A, B, C, D$ διακεκριμένα

Η (1) λέει ότι $A * B * C$ κ' αν $D = A$, τότε $B * C * A$ (από Δ3 [illegible])

Άρα $A, B, C, D$ διακεκριμένα

Αν όχι η (3) $A * D * B$ (4) ή $B * A * D$ (5)

Θα αποκλείσουμε τα (4) & (5) (κ' τότε θα ισχύει η πρόταση να [illegible] [illegible] η (3))

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (4) : $A * D * B$ κ' $\overset{(1)}{A * B * C}$ κ' $\overset{(2)}{B * C * D}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \nsim_D B \\ A \sim_B D \\ D \nsim_A B \end{array} \right\}$ (A) $\left\{ \begin{array}{l} A \nsim_B C \\ A \sim_C B \\ B \nsim_A C \end{array} \right.$ $\left\{ \begin{array}{l} B \sim_C D \\ B \sim_D C \\ C \nsim_B D \end{array} \right.$

$\left. \begin{array}{l} A \sim_B D \\ A \nsim_B D \end{array} \right\} \Rightarrow C \nsim_B D$ ΑΤΟΠΟ, εφόσον από την [illegible] (2) ισχύει $C \sim_B D$

**ΑΣΚΗΣΗ** : 1) Δεν ισχύει η S
2) $2^{o}$ μέρος της απόδειξης